29/10/2018
7° μάθημα

1) $c: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ καμπύλη με φυσική παράμετρο $s \in I$

καμπυλότητα: $k: I \subset \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ $k(s) = \|\ddot{c}(s)\|$

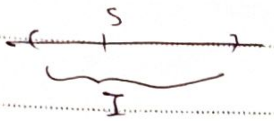
2) Αν $c: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ κανονική καμπύλη με παράμετρο $t \in I$ τότε η καμπυλότητα είναι $k = \frac{\|c' \times c''\|}{\|c'\|^3}$

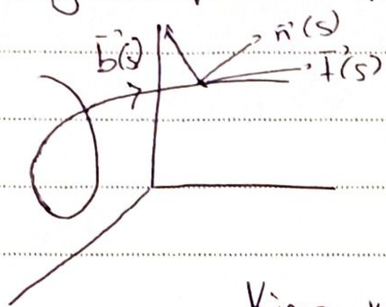
3) $c: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $c(t) = (a\cos t, a\sin t, bt)$, $a > 0$

$k = \frac{a}{a^2+b^2}$

Υπόθεση: $k > 0$ παντού

Πλαίσιο Frenet για καμπύλες με φυσική παράμετρο





$\vec{t}(s) = \dot{c}(s)$

$\langle \dot{c}, \dot{c} \rangle = 1 \Rightarrow 2\langle \ddot{c}, \dot{c} \rangle = 0 \Rightarrow \dot{c} \perp \ddot{c}$

Κύριο κάθετο: $\vec{n}(s) = \frac{\ddot{c}(s)}{\|\ddot{c}(s)\|} = \frac{\ddot{c}(s)}{k(s)}$

Δεύτερο κάθετο: $\vec{b}(s) = \vec{t}(s) \times \vec{n}(s)$

$\dot{\vec{t}} = k\vec{n}$ $\quad \dot{\vec{n}} = -k\vec{t} + \tau\vec{b}$ $\quad \dot{\vec{b}} = -\tau\vec{n}$

$\dot{\vec{n}} = \langle \dot{\vec{n}}, \vec{t} \rangle \vec{t} + \cancel{\langle \dot{\vec{n}}, \vec{n} \rangle \vec{n}} + \langle \dot{\vec{n}}, \vec{b} \rangle \vec{b}$

$\langle \dot{\vec{n}}, \vec{t} \rangle = (\langle \vec{n}, \vec{t} \rangle)^{\cdot} - \langle \vec{n}, \dot{\vec{t}} \rangle = -\langle \vec{n}, k\vec{n} \rangle \Rightarrow \boxed{\langle \dot{\vec{n}}, \vec{t} \rangle = -k}$

$\langle \dot{\vec{n}}, \vec{n} \rangle = \frac{1}{2}(\langle \vec{n}, \vec{n} \rangle)^{\cdot} = 0$

Ορισμός

Καλούμε στρέψη μια καμπύλη $c: I \to \mathbb{R}^3$ με φυσική παράμετρο $s \in I$ και καμπυλότητα $\kappa(s) > 0 \ \forall s \in I$ τη συνάρτηση $\tau: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\tau(s) = \langle \dot{\vec{n}}(s), \vec{b}(s) \rangle$$

$$\dot{\vec{b}} = \cancel{\langle \dot{\vec{b}}, \vec{t} \rangle \vec{t}} + \langle \dot{\vec{b}}, \vec{n} \rangle \vec{n} + \langle \dot{\vec{b}}, \vec{b} \rangle \vec{b}$$

$$\langle \dot{\vec{b}}, \vec{t} \rangle = (\langle \vec{b}, \vec{t} \rangle)^{\cdot} - \langle \vec{b}, \dot{\vec{t}} \rangle = -\langle \vec{b}, \kappa \vec{n} \rangle = 0$$
$$\langle \dot{\vec{b}}, \vec{n} \rangle = (\langle \vec{b}, \vec{n} \rangle)^{\cdot} - \langle \vec{b}, \dot{\vec{n}} \rangle = -\tau$$
$$\langle \dot{\vec{b}}, \vec{b} \rangle = \frac{1}{2} (\langle \vec{b}, \vec{b} \rangle)^{\cdot} = 0$$

Εξισώσεις Frenet

$$\begin{pmatrix} \vec{t} \\ \vec{n} \\ \vec{b} \end{pmatrix}^{\cdot} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ 0 & -\kappa & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{t} \\ \vec{n} \\ \vec{b} \end{pmatrix} \qquad X' = AX$$

Υπολογισμός της στρέψης

$$\dot{\vec{n}} = \left(\frac{\ddot{c}}{\kappa} \right)^{\cdot} = \left(\frac{1}{\kappa} \right)^{\cdot} \ddot{c} + \frac{1}{\kappa} \dddot{c} \qquad \vec{b} = \vec{t} \times \vec{n} = \dot{c} \times \left(\frac{\ddot{c}}{\kappa} \right)$$

$$\dot{\vec{n}} = \left(\frac{1}{\kappa} \right)^{\cdot} \ddot{c} + \frac{1}{\kappa} \dddot{c} , \qquad \vec{b} = \frac{1}{\kappa} \dot{c} \times \ddot{c}$$

$$\tau = \langle \dot{\vec{n}}, \vec{b} \rangle = \left\langle \left(\frac{1}{\kappa} \right)^{\cdot} \ddot{c} + \frac{1}{\kappa} \dddot{c}, \frac{1}{\kappa} \dot{c} \times \ddot{c} \right\rangle = \frac{\langle \dddot{c}, \dot{c} \times \ddot{c} \rangle}{\kappa^2}$$

Πρόταση $\tau = \dfrac{[\dot{c}, \ddot{c}, \dddot{c}]}{\kappa^2} = \dfrac{[\dot{c}, \ddot{c}, \dddot{c}]}{\|\ddot{c}\|^2}$

Για καμπύλες $c(s)$ με φυσική παράμετρο και $\kappa(s) > 0 \ \forall s \in I$.

Στρέψη Κανονικών Καμπυλών με τυχαία παράμετρο $t \in I$ να καμπυλότητα $k(t) > 0 \ \forall\, t \in I$

$c: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3 \qquad s = \int_{t_0}^{t} \|c'(u)\|\,du \qquad \dfrac{ds}{dt} = \|c'\| > 0$

$\Rightarrow s = s(t)$ αντιστρέφεται $t = f(s) = t(s) \qquad \dfrac{dt}{ds} = \dfrac{1}{\frac{ds}{dt}} = \dfrac{1}{\|c'\|}$

Η αναπαραμέτρηση της $c: I \to \mathbb{R}^3$ είναι η καμπύλη $\bar{c} = c \circ f$

Έχει στρέψη $\bar{\tau}$

ορισμός:
Λέμε στρέψη της καμπύλης $c: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ τη συνάρτηση
$\tau: I \to \mathbb{R} \qquad \tau = \bar{\tau} \circ s$ ή $\tau(t) = \bar{\tau}(s(t))$

$$k = \frac{\|c' \times c''\|}{\|c'\|^3}$$

$$\tau = \frac{[\dot{c}, \ddot{c}, \dddot{c}]}{k^2}$$

$$\dot{c} = \frac{dc}{ds} = \frac{dt}{ds}\cdot\frac{dc}{dt} \Rightarrow \boxed{\dot{c} = \frac{dt}{ds}\,c'}$$

$$\ddot{c} = \frac{d}{ds}\left(\frac{dt}{ds}\,c'\right) = \frac{d^2t}{ds^2}\,c' + \frac{dt}{ds}\cdot\frac{dc'}{ds} \Rightarrow \boxed{\ddot{c} = \frac{d^2t}{ds^2}\,c' + \left(\frac{dt}{ds}\right)^2 c''}$$

$$\ddot{c} = \frac{d^2t}{ds^2}\,c' + \frac{dt}{ds}\,\frac{dt}{ds}\,\frac{dc'}{dt}$$

$$\dddot{c} = \frac{d\ddot{c}}{ds} = \frac{d}{ds}\left(\frac{d^2t}{ds^2}\,c' + \left(\frac{dt}{ds}\right)^2 c''\right) = \frac{d^3t}{ds^3}\,c' + \frac{d^2t}{ds^2}\,\frac{dc'}{ds} + 2\frac{dt}{ds}\,\frac{d^2t}{ds^2}\,c'' + \left(\frac{dt}{ds}\right)^2 \frac{dc''}{ds}$$

$$= \frac{d^3t}{ds^3}\,c' + 3\frac{d^2t}{ds^2}\,\frac{dt}{ds}\,c'' + \left(\frac{dt}{ds}\right)^2 \frac{dt}{ds}\,\frac{dc''}{dt}$$

$$\boxed{\dddot{c} = \frac{d^3t}{ds^3}\,c' + 3\frac{dt}{ds}\,\frac{d^2t}{ds^2}\,c'' + \left(\frac{dt}{ds}\right)^3 c'''}$$

$$\tau = \frac{1}{k^2}\left[\frac{dt}{ds}c', \cancel{\frac{d^2t}{ds^2}c'} + \left(\frac{dt}{ds}\right)^2 c'', \cancel{\frac{d^3t}{ds^3}c'} + \cancel{3\frac{dt}{ds}\frac{dt^2}{ds^2}c''} + \left(\frac{dt}{ds}\right)^3 c'''\right]$$

$$= \frac{1}{k^2}\left(\frac{dt}{ds}\right)^6 [c', c'', c'''] = \frac{\cancel{\|c'\|^6}}{\|c'\times c''\|^2}\cdot\frac{1}{\cancel{\|c'\|^6}}[c', c'', c''']$$

Πρόταση

Η στρέψη καμπύλης $c: I \to \mathbb{R}^2$ κανονική με παράμετρο $t \in I$ και καμπυλότητα $k(t) > 0 \ \forall t \in I$ είναι $\tau = \frac{[c', c'', c''']}{\|c'\times c''\|^2}$

Πλαίσιο Frenet για καμπύλες με τυχούσα παράμετρο

$$\frac{ds}{dt} = \|c'\| \Rightarrow \frac{dt}{ds} = \frac{1}{\|c'\|}$$

$$\vec{t} = \dot{c} = \frac{dt}{ds}c' \Rightarrow \boxed{\vec{t} = \frac{c'}{\|c'\|}} \quad \boxed{\vec{b} = \frac{c'\times c''}{\|c'\times c''\|}}, \quad \boxed{\vec{n} = \vec{b}\times\vec{t}}$$

$$\vec{b} = \vec{t}\times\vec{n} = \vec{t}\times\frac{\ddot{c}}{k} = \frac{1}{k}\vec{t}\times\ddot{c} = \frac{1}{k\|c'\|}c'\times\left\{\frac{d^2t}{ds^2}c' + \left(\frac{dt}{ds}\right)^2 c''\right\} = \frac{\left(\frac{dt}{ds}\right)^2}{k\|c'\|}c'\times c''$$

$$\Rightarrow \quad \vec{b} = \frac{1}{k\|c'\|^3}c'\times c''$$

Έστω $c, \tilde{c}: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ κανονικές γεωμ. ισότιμες $\tilde{c} = T\circ c$, $T \in Isom(\mathbb{R}^3)$

$T = T_v \cdot T_x$, $T_x = A \in O(3)$

$$\tilde{c}(s) = T\circ c(s) \Rightarrow \dot{\tilde{c}} = T_* \dot{c} \qquad \tau = \frac{[\dot{c}, \ddot{c}, \dddot{c}]}{k^2}$$

$$\ddot{\tilde{c}} = T_* \ddot{c}$$

$$\dddot{\tilde{c}} = T_* \dddot{c} \qquad \tilde{\tau} = \frac{[\dot{\tilde{c}}, \ddot{\tilde{c}}, \dddot{\tilde{c}}]}{\tilde{k}^2}$$

$$\tilde{k} = k$$

$$[\dot{\bar c}, \ddot{\bar c}, \dddot{\bar c}] = [T_* \dot c, T_* \ddot c, T_* \dddot c] = \det T_* [\dot c, \ddot c, \dddot c] = \pm [\dot c, \ddot c, \dddot c]$$

$$\Rightarrow \boxed{\bar\tau = \pm \tau}$$

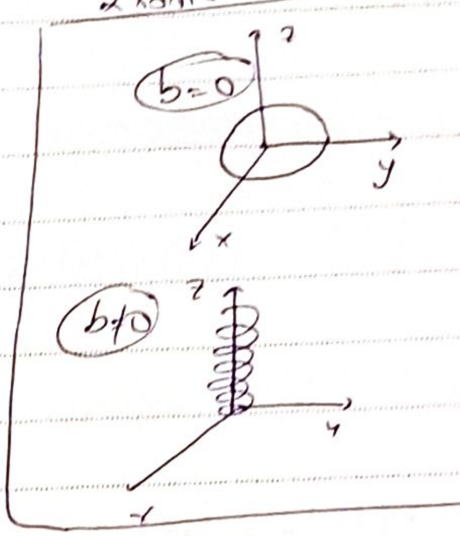
Παρατήρηση: $c(s)$, $\bar s = f(s) = -s$ $\quad \frac{dc}{d\bar s} = \frac{ds}{d\bar s} \cdot \frac{dc}{ds} = -\dot c$

$$\left[\frac{dc}{d\bar s}, \frac{d^2 c}{d\bar s^2}, \frac{d^3 c}{d\bar s^3}\right] = [-\dot c, \ddot c, -\dddot c] = [\dot c, \ddot c, \dddot c]$$

$c(t) = (a\cos t, a\sin t, bt)$ $\quad a > 0 \quad b \in \mathbb{R}$

$$k = \frac{a}{a^2+b^2} > 0, \qquad \tau = \frac{b}{a^2+b^2}$$

Σχόλιο



Επίπεδες Καμπύλες

Ορισμός

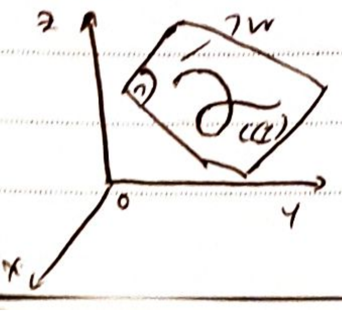
Μια καμπύλη του $\mathbb{R}^3$ καλείται επίπεδη αν-ν η εικόνα της περιέχεται σε κάποιο επίπεδο.

Πρόταση

Έστω $c: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ κανονική καμπύλη με παντού θετική καμπυλότητα. Τότε η c είναι επίπεδη αν-ν η στρέψη της είναι παντού 0.

Απόδειξη

Έστω ότι η c με παράμετρο το μήκος τόξου είναι επίπεδη



$c(s) = (x(s), y(s), z(s))$ $\quad \Pi: Ax + By + \Gamma z + D = 0$

$$w = \frac{(A, B, \Gamma)}{\sqrt{A^2+B^2+\Gamma^2}} \perp \Pi$$

Από υπόθεση έχω ότι $Ax(s) + By(s) + \Gamma z(s) + \Delta = 0 \quad \forall s \in I$

$\Leftrightarrow \langle c(s), w \rangle = -\frac{\Delta}{\sqrt{A^2+B^2+\Gamma^2}} = $ σταθερό

$\Rightarrow \langle \dot{c}(s), w \rangle = 0 \ \forall s \in I \Rightarrow \langle \ddot{c}(s), w \rangle = 0 \quad \forall s \in I$

$\vec{n}(s) = \frac{\ddot{c}(s)}{k(s)}$

$\Leftrightarrow \langle \vec{t}(s), w \rangle = 0 = \langle \vec{n}(s), w \rangle \Rightarrow$

$\Rightarrow B(s) = \vec{t}(s) \times \vec{n}(s) = \pm w \ \forall s \Rightarrow \dot{\vec{b}}(s) = 0 \xrightarrow[\text{Frenet}]{3^{\eta} \text{ εξίσωση}}$

$-\tau(s)\vec{n}(s) = 0 \Rightarrow \tau(s) = 0 \ \forall s$

Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι $\tau(s) = 0 \ \forall s \in I$

$\dot{\vec{b}}(s) = -\tau(s)\vec{n}(s) = 0 \quad \forall s \in I \Rightarrow \vec{b}(s) = \text{σταθερά} = w$

Θεωρώ τη συνάρτηση $f(s) = \langle c(s), w \rangle$, $f: I \to \mathbb{R}$

$\dot{f}(s) = \langle \dot{c}(s), w \rangle = \langle \vec{t}(s), \vec{b}(s) \rangle = 0 \quad \forall s \in I$

$f(s) = \text{σταθερά} = a_0 \Rightarrow \langle c(s), w \rangle = a_0 \quad c(s) = (x(s), y(s), z(s))$

$w = (A, B, \Gamma)$

$\Rightarrow Ax(s) + By(s) + \Gamma z(s) = a_0$

$\Rightarrow c(I) \subset \Pi : Ax + By + \Gamma z = a_0$

Θεμελιώδες Θεώρημα για καμπύλες του $\mathbb{R}^3$

(i) <u>Ύπαρξη</u>: Για τυχούσες λείες συναρτήσεις $k, \tau : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $k(s) > 0 \ \forall s \in I$ υπάρχει καμπύλη $c : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ με s = μήκος τόξου καμπυλότητα και στρέψη τις δοθείσες συναρτήσεις k και τ.

(ii) <u>Μοναδικότητα</u>: Έστω $c, \tilde{c} : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ καμπύλες με <u>ΚΟΙΝΗ</u> φυσική παράμετρο $s \in I$, καμπυλότητα $k, \tilde{k} : I \to (0, +\infty)$ και στρέψη $\tau, \tilde{\tau} : T \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
Αν ισχύει $\tilde{k} = k$ και $\tilde{\tau} = \tau$ τότε υπάρχει $T \in Isom(\mathbb{R}^3)$ η οποία διατηρεί τον προσανατολισμό ώστε $\tilde{c} = T \circ c$.